Az alakváltozási energiasűrűségre épülő R-görbe

Dr. Krállics György – Dr. Lovas Jenő* – Montvai Csaba**

Bevezetés

Repedést (folytonossági hiányt) tartalmazó szerkezetek integritásának megítélésében egyre fontosabb szerepet játszik valamely törésmechanikai filozófiára épülő méretezési/ellenőrzési eljárás alkalmazása.

A számítások során a következő alapkérdésekre kell választ adni:

A szerkezetben lévő repedés mikor, merre és hogyan fog terjedni?

Amikor kérdés megválaszolásához valamilyen törési elmélet megválasztása szükséges; *a merre kérdéshez* az adott töréselmélet törési kritériumához tartozó anyagjellemző ismerete szükséges, míg *a hogyan fog terjedni kérdéshez* statikus terhelés esetén az adott töréselmélethez tartozó törésmechanikai paraméter és a repedésnövekedés kapcsolatának meghatározása szükséges.

Jelen dolgozatban törési kritériumként a *G.C. Sih* által megfogalmazott [1] alakváltozási energiasűrűség elméletet használjuk, és anyagjellemzőként J-integrálra épülő alakváltozási energiasűrűségi együtthatót (S) értelmezzük.

Az alakváltozási energiasűrűségi elmélet alapfeltevései a következők:

1. A repedés abban az irányban indul el ahol az alábbi módon értelmezett S (Θ) alakváltozási energiasűrűségi együtthatónak minimuma van.

$$W = \frac{S(\Theta)}{r}$$

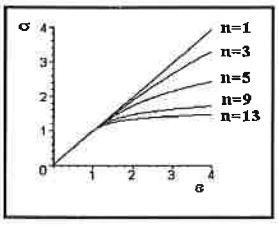
ahol $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ az alakváltozási energiasűrűség.

2. A repedés akkor indul el, ha az S értéke eléri az anyagra jellemző S_c értékét.

3. A repedésterjedés törvényszerűségét az $S - \Delta a$ kapcsolat írja le.

Az általunk javasolt elméletben az S értékét a J-integrál segítségével kívánjuk előállítani, így első lépésként a J-integrál numerikus meghatározására van szükség.

A J-integrál numerikus számítása



A J-integrál értékét egy repedést tartalmazó anyagban, *sík feszültség-*, illetve *sík alakváltozás-állapotban* számíthatjuk ki, amikor a repedéscsúcsnál lévő képlékeny zóna mérete kellően kicsi a repedés méretéhez képest. Az alkalmazott feszültség időben csak monoton növekvő lehet, tehermentesítéses szakasz nem megengedett.

Az anyag keményedő, ami a feszültség–alakváltozás függvényben jelentkezik, mely a következő összefüggéssel adható meg:

$$\varepsilon = \sigma + \alpha\sigma^n$$

ahol α – anyagállandó, n – keményedési kitevő. $\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_y}$, ahol $\bar{\sigma}_y$ – a folyási feszültség, $\varepsilon = \frac{E\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}_y}$, ahol E – a kezdeti rugalmassági modulus. Ekkor az anyagtörvény:

$$\varepsilon_{ij} = (1+\nu)s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3}\sigma_{pp}\delta_{ij} + \frac{3}{2}\alpha\sigma_e^{n-1}s_{ij},$$

ahol $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$ Mises-féle egyenértékű feszültség,

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ feszültségi deviátor, δ_{ij} a Kronecker-féle szimbólum. A kiegészítő potenciális energia:

$$\int_A \left\{ \frac{1}{3}(1+\nu)\sigma_e^2 + \frac{1-2\nu}{6}\sigma_{kk}^2 + \frac{\alpha}{n+1}\sigma_e^{n+1} \right\} dA \tag{1}$$

Polárkoordináták esetén a feszültségek:

$$\sigma_r = r^{-1}\Phi' + r^{-2}\Phi^{\bullet\bullet},$$

$$\sigma_\Theta = \Phi'',$$

$$\sigma_{r\Theta} = -\left(r^{-1}\Phi^{\bullet}\right)'.$$

ahol $(\ )' = \frac{\partial}{\partial r}$, $(\ )^{\bullet} = \frac{\partial}{\partial \Theta}$,

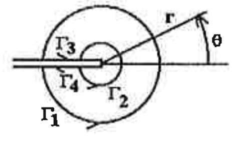
$\Phi = \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\sigma}_y L^2}$, $r = \frac{\bar{r}}{L}$, ahol L a repedés hosszának fele.

Az elmozdulások:

$$\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_\Theta + \alpha\sigma_e^{n-1}\left(\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\Theta\right),$$

$$\varepsilon_\Theta = \sigma_\Theta - \nu\sigma_r + \alpha\sigma_e^{n-1}\left(\sigma_\Theta - \frac{1}{2}\sigma_r\right),$$

$$\varepsilon_{r\Theta} = (1-\nu)\sigma_{r\Theta} + \frac{3}{2}\alpha\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\Theta}.$$



A kompatibilitási egyenletből eliminálva a feszültségeket kapjuk:

$$r^{-1}(r\varepsilon_\Theta)'' + r^{-2}\varepsilon_r^{\bullet\bullet} - r^{-1}\varepsilon_r' - 2r^{-2}\left(r\varepsilon_{r\Theta}^{\bullet}\right)' = 0 \tag{2}$$

Legyen $\Phi = r^s\varphi_1(\Theta) + r^t\varphi_2(\Theta) + \ldots$ Mivel $s < t$ stb. esetén az első tag a domináns, a többit elhanyagolhatjuk.

Ekkor: $\Phi = Kr^s\varphi\ (\Theta)$, ahol K az amplitúdó. Így a feszültségek:

$$\sigma_r = Kr^{s-2}\tilde{\sigma}_r(\Theta) = Kr^{s-2}\left(s\varphi - \varphi^{\bullet\bullet}\right),$$

$$\sigma_\Theta = Kr^{s-2}\tilde{\sigma}_\Theta(\Theta) = Kr^{s-2}s(s-1)\varphi,$$

$$\sigma_{r\Theta} = Kr^{s-2}\tilde{\sigma}_{r\Theta}(\Theta) = Kr^{s-2}(1-s)\varphi^{\bullet}.$$

Sík feszültségállapot

Ekkor az (1), (2) egyenletek felhasználásával kapjuk a következő differenciálegyenletet:

$$\left(n(n-2) - \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)\left(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\left(s(s-3)\varphi - 2\varphi^{\bullet\bullet}\right)\right) +$$

$$+\left(n(s-2)+1\right)n(s-2)\tilde{\sigma}_e^{n-1}\left(s(2s-3)\varphi - \varphi^{\bullet\bullet}\right) + \tag{3}$$

$$+6\left(n(s-2)+1\right)(s-1)\left(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\varphi^{\bullet}\right)^{\bullet} = 0,$$

* BME Gépészmérnöki Kar Mechanikai Technológia és Anyagszerkezettani Tanszék

** BME Gépészmérnöki Karának hallgatója

ahol

$$\sigma_e = Kr^{s-2}\tilde{\sigma}_e(\Theta) = Kr^{s-2}\sqrt{\tilde{\sigma}_r^2 + \tilde{\sigma}_\Theta^2 - \tilde{\sigma}_r\tilde{\sigma}_\Theta + 3\tilde{\sigma}_{r\Theta}^2}.$$

A megfelelő peremfeltételek: $\varphi\ (\pm\pi) = \varphi^{\bullet}(\pm\pi) = 0$, a szimmetria miatt: $\varphi^{\bullet\bullet\bullet}(0) = \varphi^{\bullet}(0) = 0$. Az $s = \dfrac{2n+1}{n+1}$ érték egy százaléknál kisebb hibával igaz. Ekkor a (3) egyenlet numerikusan megoldható.

A J-integrál definíciója:

$$J = \int_\Gamma \left(Wdy - \sigma_{ij}n_j u_{i,x}ds\right),$$

ahol $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$ az alakváltozási energiasűrűség. Fennállnak még a következők:

$$W = \alpha\ K^{n+1}\frac{n}{n+1}r^{(n+1)(s-2)}\tilde{\sigma}_e^{n+1},$$

$$\sigma_{ij}n_j u_{i,x} = K^{n+1}r^{(n-1)(s-2)}[\sin\Theta\left(\tilde{\sigma}_r\left(u_\Theta - u_r^{\bullet}\right) - \tilde{\sigma}_{r\Theta}\left(u_r - u_\Theta^{\bullet}\right)\right) +$$
$$+\left(n(s-2)+1\right)\cos\Theta\left(\tilde{\sigma}_r u_r + \tilde{\sigma}_{r\Theta}u_\Theta\right)],$$

$$u_r = \tilde{\sigma}_e^{n-1}\frac{s(3-s)\frac{\varphi}{2} + \varphi^{\bullet\bullet}}{n(s-2)+1},$$

$$u_\Theta^{\bullet} = \tilde{\sigma}_e^{n-1}\left(s\left(s - \frac{3}{2}\right)\varphi - \frac{\varphi^{\bullet\bullet}}{2}\right) - u_r.$$

A Γ_2 úton r_2 sugárral számított J-integrál:

$$\int_{\Gamma_2}\left(Wdy - \sigma_{ij}n_j u_{i,x}ds\right) = \alpha\ K^{n+1}r_2^{(n+1)(s-2)+1}I, \quad \text{ahol}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}[\frac{n}{n+1}\tilde{\sigma}_e^{n+1}\cos\Theta - \{\sin\Theta\left(\tilde{\sigma}_r\left(u_\Theta - u_r^{\bullet}\right) - \tilde{\sigma}_{r\Theta}\left(u_r + u_\Theta^{\bullet}\right)\right) +$$
$$+\left(n(s-2)+1\right)\left(\tilde{\sigma}_r u_r + \tilde{\sigma}_{r\Theta}u_\Theta\right)\cos\Theta\}]d\Theta, \qquad (4)$$

$$K = \left(\frac{\pi}{\alpha\ I}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\sigma^\infty\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

ahol $\sigma^\infty = \dfrac{\overline{\sigma^\infty}}{\sigma_y}$, ahol $\overline{\sigma^\infty}$ a repedéstől kellően távol lévő feszültség.

Így $W = \dfrac{n\pi\left(\sigma^\infty\right)^2}{(n+1)Ir}\tilde{\sigma}_e^{n+1}$ és $E_n = \dfrac{n\pi}{(n+1)I}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\sigma}_e^{n+1}d\Theta$ már számítható, utóbbi sík alakváltozás-állapotban is igaz.

Sík alakváltozás-állapot

Ekkor az (1), (2) egyenletek felhasználásával kapjuk a következő differenciálegyenletet:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} - n(s-2)\left(n(s-2)+2\right)\right)\left(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\left(s(2-s)\varphi - 2\varphi^{\bullet\bullet}\right)\right) +$$
$$4(s-1)\left(n(s-2)+1\right)\left(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\varphi^{\bullet}\right)^{\bullet} = 0, \qquad (5)$$

ahol az egyenértékű feszültség:

$$\sigma_e = Kr^{s-2}\tilde{\sigma}_e(\Theta) = Kr^{s-2}\sqrt{\frac{3}{4}\left(\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\Theta\right)^2 + 3\tilde{\sigma}_{r\Theta}^2}.$$

A megfelelő peremfeltételek: $\varphi\ (\pm\pi) = \varphi^{\bullet}\ (\pm\pi) = 0$, a szimmetria miatt: $\varphi^{\bullet\bullet\bullet}\ (0) = \varphi^{\bullet}\ (0) = 0$. Az $s = \dfrac{2n+1}{n+1}$ érték egy százaléknál kisebb hibával igaz. Ekkor az (5) egyenlet megoldható.

Most I értéke (4) szerint számolható, de

$$u_r = \tilde{\sigma}_e^{n-1}\frac{3\left(s(2-s)\varphi + \varphi^{\bullet\bullet}\right)}{4(2-s)},$$

$$u_\Theta^{\bullet} = (s-3)u_r,$$

$$K = \left(\frac{\left(1-\nu^2\right)\pi}{\alpha\ I}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\sigma^\infty\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

ahol $\sigma^\infty = \dfrac{\overline{\sigma^\infty}}{\sigma_y}$, ahol $\overline{\sigma^\infty}$ a repedéstől kellően távol lévő feszültség.

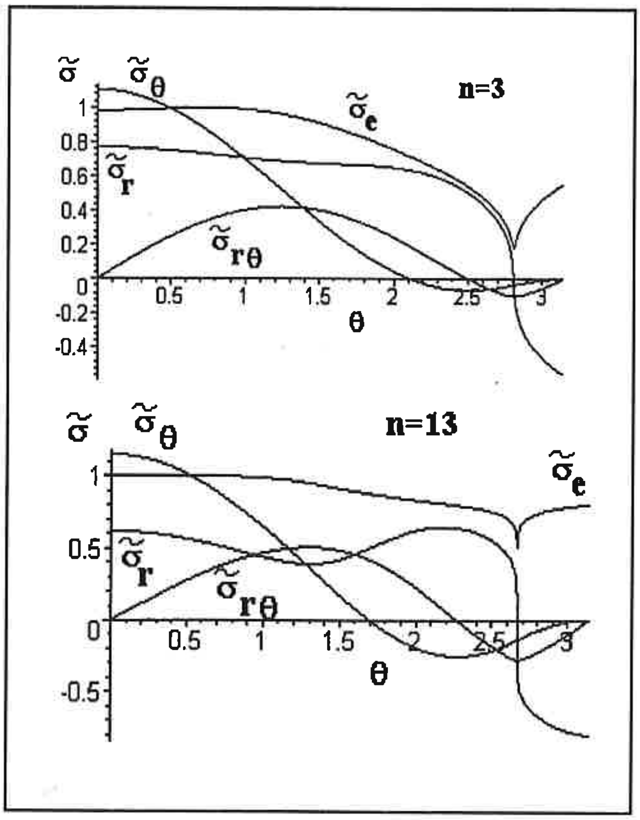
A numerikus számítás során kapott eredmények

Hutchinson [2] és a módszere alapján reprodukált eredmények összehasonlítása:

A sík feszültségállapotra:

n	3	5	9	13
I_H	3,86	3,41	3,03	2,87
I	4,228	3,520	3,039	2,860
$\left(\frac{\pi}{I}\right)^{\frac{1}{n+1}}$_H	0,949	0,987	1,004	1,006
$\left(\frac{\pi}{I}\right)^{\frac{1}{n+1}}$	0,928	0,981	1,003	1,007
E_n_H	2,16	2,45	2,67	2,76
E_n	1,975	2,374	2,662	2,757

A feszültségek változását a repedéscsúcstól r = állandó távolságra az *1. ábra* szemlélteti az n = 3 és 13 értékű keményedési kitevővel jellemzett anyagban.



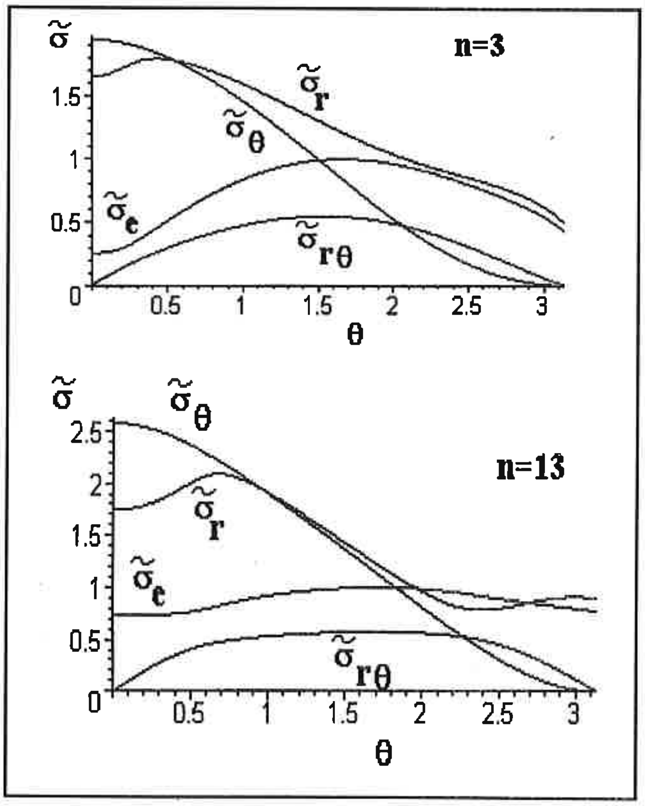
1. ábra. A feszültség változás sík feszültségállapotban a repedés csúcsa körül r = állandó távolságra

A sík alakváltozás-állapotra:

n	3	5	9	13
I_H	5,51	5,01	4,60	4,40
I	5,177	4,701	4,353	4,205
$\left(\frac{\pi}{I}\right)^{\frac{1}{n+1}}$_H	0,869	0.925	0,963	0,976
$\left(\frac{\pi}{I}\right)^{\frac{1}{n+1}}$	0,883	0,935	0,968	0,979
E_n_H	1,23	1,37	1,48	1,52
E_n	1,306	1,477	1,570	1,589

(A _H jel Hutchinson eredményeit jelöli.)

A feszültségek változását a repedéscsúcstól r = állandó távolságra az *2. ábra* szemlélteti az n = 3 és 13 értékű keményedési kitevővel jellemzett anyagban.



2. ábra. A feszültség változása sík alakváltozás-állapotban a repedés csúcsa körül r = állandó távolságra

A numerikus számítás menete

A számolás a Maple V 5-ös rendszerben történt. Az egyes lépések:

– Az anyagparaméter megadása.

– A megoldandó differenciálegyenlet definiálása.

– Az adott peremérték-feladat kezdetiérték-feladattá történő konvertálása, mely a numerikus számításhoz szükséges. Ez a kellő megfontolásokkal felvett kezdeti értékek illetve az anyagjellemző s paraméter megfelelő változtatásával történt úgy, hogy a peremértékeknek megfelelő numerikus megoldás adódjon.

– A megoldásfüggvények normálása úgy, hogy $\tilde{\sigma}_e \leq 1$ mindig fennálljon, de legalább egy helyen felvegye maximumát.

– A számolt feszültségértékek grafikonos megjelenítése.

– A J-integrál I paraméterének számolásához szükséges egyenletek definiálása.

– Az I értékének meghatározása numerikus integrálással.

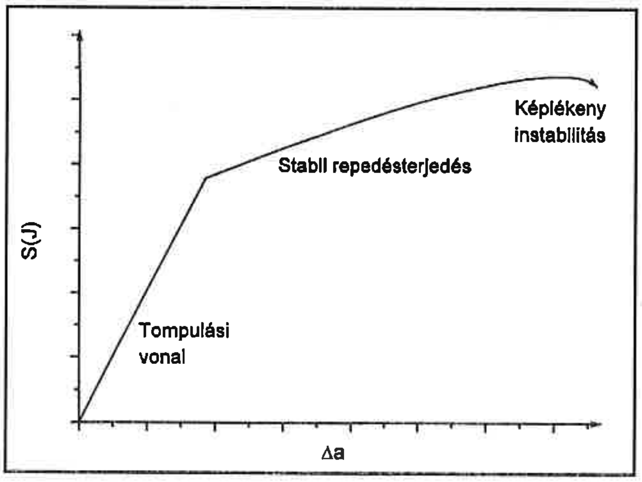
A fent ismertetett eljárással megteremthető a kapcsolat az alakváltozási energiasűrűségi együttható és a J-integrál között. Ez a kapcsolat:

$$S = \alpha K^{n+1} \frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_e^{\,n+1} \qquad (6)$$

ahol:

$$K = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\upsilon^2}{\alpha I} J\right)^{\frac{1}{n-1}} & \text{sík alakváltozás-állapotban} \\ \left(\dfrac{J}{\alpha I}\right)^{\frac{1}{n-1}} & \text{sík feszültség-állapotban} \end{cases} \qquad (7)$$

Ezek után az utolsó lépés az anyagvizsgálati módszerrel meghatározott J–Δa görbét S–Δa görbére transzformálni. *(3. ábra)*



3. ábra. A repedésterjedést leíró S – Δa görbe

A fenti eljárás előnye, hogy az így értelmezett S–Δa görbe összetett igénybevételi mód esetén is használható mint repedésterjedési ellenállás görbe.

Összefoglalás

– Az általunk ismertetett eljárásnál a törésmechanikai ellenőrzést az alábbi lépésekben kell elvégezni:

– Határozzuk meg a repedés csúcsában az alakváltozási energiasűrűségi együttható minimumához tartozó Θ_0 szöget. Ez lesz a repedésterjedés iránya.

– Szakítóvizsgálatból és az R-görbe felvételéből határozzuk meg az anyagra jellemző a, n, $J-\Delta a$ értékeket.

– A fenti jellemzők ismeretében a (6) összefüggés alapján határozzuk meg az S–Δa görbét.

– Ezen repedésterjedési ellenállás görbe ismeretében a repedés a szerkezet integritása szempontjából már értékelhető.

Irodalom

[1] *Sih G.C.:* Mechanics of fracture initiation and propagation. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1991.

[2] *Hutchinson J.W.:* Singular behaviour at the end of tensile crack in hardening material. Mechanics and Phisics of Solids. 16. pp. 13-31. 1968.